УДК 517.95
ББК 22.162

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ДОСТАВЛЯЮЩЕЙ МИНИМУМ В ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ [1]

А.А. Клячин

В данной работе исследуется вопрос о равномерной сходимости последовательности функций, минимизирующей некоторый выпуклый функционал. Получены оценки скорости такой сходимости для различных краевых условий.

Ключевые слова: *вариационные задачи, минимизация выпуклого функционала, скорость сходимости, уравнение минимальной поверхности, смешанная краевая задача.*

1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ и $G(x,\xi)$ — функция, определенная для любой точки $x \in \Omega$ и любого вектора $\xi \in \mathbf{R}^n$. Будем предполагать, что $G(x,\xi)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и дифференцируема в Ω по x, а по переменной ξ является дважды непрерывно дифференцируемой. Далее будем считать, что найдутся такие положительные функции $\nu(|\xi|), \mu(|\xi|)$, что выполнены неравенства

$$\nu(|\xi|)|p|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} G''_{\xi_i\xi_j}(x,\xi)p_ip_j \leq \mu(|\xi|)|p|^2$$

для любых $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbf{R}^n$ и $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbf{R}^n$. Не ограничивая общности, можем считать, что функция ν является невозрастающей, а функция μ — неубывающей. Определим функционал

$$I(f) = \int_{\Omega} G(x, \nabla f(x))dx \tag{1}$$

для любой функции $f \in C^1(\Omega)$, при условии, что интеграл в (1) сходится. Как известно (см., например, [1]), вариационная задача

$$I(f) \to \min, \quad f|_{\partial\Omega} = \varphi$$

приводит к уравнению Эйлера — Лагранжа для данного функционала

$$Q[f] \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(G'_{\xi_i}(x,\nabla f)\right) = 0. \tag{2}$$

Помимо краевого условия Дирихле будем рассматривать решения уравнения (2), удовлетворяющие условию либо Неймана

$$\sum_{i=1}^{n} G'_{\xi_i}(x, \nabla f)\nu_i|_{\partial\Omega} = \psi,$$

когда граница $\partial\Omega$ является кусочно гладкой, либо смешанному условию

$$f|_{\partial\Omega\setminus\Gamma} = \varphi, \quad \sum_{i=1}^{n} G'_{\xi_i}(x, \nabla f)\nu_i|_{\Gamma} = \psi,$$

где Γ — кусочно гладкий кусок границы $\partial\Omega$ и $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Пример 1. Пусть $G(x,\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$. Тогда уравнение (2) есть уравнение минимальных поверхностей

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right) = 0. \qquad (3)$$

При этом

$$\nu(|\xi|) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{3/2}}, \quad \mu(|\xi|) = \frac{1}{\sqrt{1+|\xi|^2}}.$$

Одним из способов приближенного решения краевых задач эллиптических уравнений является вариационный метод (см., например, [4], [5]). Используя этот метод, как правило, получается некоторая последовательность функций g_m, минимизирующая функционал (1), то есть $I(g_m) \to I(f)$, где f — решение соответствующей краевой задачи. В статье [2] было установлено равенство для решений уравнения минимальной поверхности (3), позволяющее утверждать о сходимости данной последовательности «в среднем». В настоящей работе исследуется вопрос о равномерной сходимости последовательности g_m к решению f. Несложные примеры показывают, что условия $I(g_m) \to I(f)$ для этого недостаточно. Поэтому приходится накладывать те или иные дополнительные ограничения на последовательность g_m. При этих предположениях мы находим оценку скорости сходимости этой последовательности. Аналогичные результаты были получены автором в статье [3] для уравнения минимальной поверхности.

2. Оценка скорости сходимости для решения задачи Дирихле

В этой части работы остановимся на получении оценок в равномерной метрике. Отметим, что рассматривая последовательность g_m такую, что $I(g_m) \to I(f)$, где f — решение уравнения (2), мы не можем гарантировать равномерной сходимости g_m к f. Однако, располагая некоторой информацией об искомом решении, можно сузить класс функций, на котором ищется минимум функционала $I(f)$. В этом случае удается получить оценку погрешности.

Итак, для получения необходимых оценок нужно потребовать дополнительные ограничения на минимизирующую последовательность, которые можно получить исходя из априорной информации о решении уравнения (2).

Введем в рассмотрение два функциональных множества. Пусть $P(x)$ — положительная непрерывная функция, заданная в области Ω. Положим

$$\mathcal{A}_P(\Omega) = \{u \in \mathrm{Lip}(\Omega) : |\nabla u(x)| \le P(x)\}.$$

Пусть $\omega(t)$ — положительная функция, определенная, непрерывная и неубывающая при $t \ge 0$. Будем считать, что $\omega(0) = 0$. Определим множество

$$\mathcal{B}_\omega(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : |u(x) - u(y)| \le \omega(d_\Omega(x, y))\},$$

где $d_\Omega(x, y)$ — внутреннее расстояние в области Ω.

Обозначим через d_0 максимум функции $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ в области Ω. Для $d \in (0; d_0]$ определим множество $\Omega_d = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \ge d\}$ и функцию

$$P(d) = \sup\{P(x) : \ x \in \Omega_d\}.$$

Будем считать, что для всех $d \in (0; d_0]$ выполнено $P(d) \ge 1$.

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет уравнению (2) в Ω. Тогда, если $f, g \in \mathcal{A}_P(\Omega) \cap \mathcal{B}_\omega(\Omega)$ и $f = g$ на $\partial\Omega$, то выполнено неравенство*

$$\sup_\Omega |f - g| \le 4 \max \left\{ \omega(d),\ 2P(d) \left(\frac{I(g) - I(f)}{\nu(P(d))\lambda(\Omega) n\omega_n} \right)^{\frac{1}{n+2}} \right\} \tag{4}$$

для любого $d \in (0; d_0]$, где ω_n — объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$ и $\lambda(\Omega)$ — основная частота области Ω.

Пример 2. Если f — решение уравнения минимальной поверхности (3), заданное в области Ω, то справедлива следующая внутренняя оценка градиента (см., например, [1, § 16.2])

$$|\nabla f(x)| \le C_1 \mathrm{exp}\{C_2 \sup_{y \in \Omega} |f(y) - f(x)|/\rho\},$$

где $\rho = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ и $C_1 = C_1(n), C_2 = C_2(n)$. Таким образом, любое решение уравнения минимальной поверхности, определенное в области Ω и ограниченное числом M, будет принадлежать множеству $\mathcal{A}_P(\Omega)$ с функцией

$$P(x) = C_1 \mathrm{exp}\{2MC_2/\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)\}.$$

Пример 3. Пусть $f, \varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, функция f является решением уравнения (3), $f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$. Предположим, что Ω — выпуклая область. Тогда модуль непрерывности функции f может быть оценен через модуль непрерывности функции φ, $\sup\limits_\Omega |\varphi|$, $\sup\limits_\Omega |f|$ (см. [1, § 14.5]). Следовательно, $f \in \mathcal{B}_\omega(\Omega)$ с некоторой функцией $\omega(t)$, зависящей от перечисленных постоянных.

Пример 4. Пусть функция $f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет в области Ω уравнению минимальных поверхностей и $f = \varphi$ на $\partial\Omega$. Предположим, что область Ω выпукла и $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Тогда

$$|\nabla f| \le C,$$

где $C = C(n, M, |\varphi|_{2;\Omega})$ и $M = \sup\limits_\Omega |f|$ (см. [1, § 14.2]). В этом случае функция $P(x) \equiv \equiv C$.

Доказательство теоремы 1. Положим $f^t = f + t(g - f)$ и $a(t) = I(f^t)$. Тогда, в силу того, что $a'(0) = 0$, имеем

$$I(g) - I(f) = \int\limits_0^1 ds \int\limits_0^s a''(t)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 ds \int\limits_0^s dt \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n G''_{\xi_i\xi_j}(x, \nabla f^t)(g - f)'_{x_i}(g - f)'_{x_j} dx \geq$$

$$\geq \int\limits_0^1 ds \int\limits_0^s dt \int\limits_\Omega |\nabla f - \nabla g|^2 \nu(|\nabla f^t|) dx. \qquad (5)$$

Зафиксируем $d \in (0; d_0]$. Положим $h = g - f$, $M = \sup\limits_\Omega |h|$.

Предположим, что $M' = \sup\limits_{\Omega\setminus\Omega_d} |h| < M/2$. Тогда, не ограничивая общности, можем считать, что найдется точка $x_0 \in \Omega_d$, в которой $h(x_0) = M$. Покажем, что шар $B_{M/4P(d)}(x_0) \subset \Omega_d$. Действительно, пусть $x' \in \partial\Omega_d$ такая, что $|x_0 - x'| = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega')$. Тогда

$$2P(d)|x_0 - x'| \geq h(x_0) - h(x') = M - h(x') \geq M - M' \geq M/2.$$

Таким образом, расстояние от точки x_0 до границы $\partial\Omega_d$ больше, чем $M/4P(d)$. Следовательно, $B_{M/4P(d)}(x_0) \subset \Omega_d$. Предположим теперь, что $x \in B_{M/4P(d)}(x_0)$. Тогда

$$h(x) \geq h(x_0) - 2P(d)|x - x_0| > M - 2P(d)\frac{M}{4P(d)} = M/2.$$

Таким образом, шар $B_{M/4P(d)}(x_0) \subset D_M$, где

$$D_M = \{x \in \Omega : |h| > M/2\} \subset\subset \Omega_d.$$

Поэтому

$$\int\limits_\Omega |\nabla h|^2 \nu(|\nabla f^t|) dx \geq \nu(P(d)) \int\limits_{D_M} |\nabla h|^2 dx \geq$$

$$\geq \lambda(\Omega)\nu(P(d)) \int\limits_{B_{M/4P(d)}(x_0)} \left(h - \frac{M}{2}\right)^2 dx.$$

Используя, что в шаре $B_{\frac{M}{8P(d)}}(x_0)$ выполнено неравенство $h(x) \geq \frac{3M}{4}$, получаем

$$\int\limits_\Omega |\nabla h|^2 \nu(|\nabla f^t|) dx \geq \lambda(\Omega)\nu(P(d)) \left(\frac{M}{8P(d)}\right)^n n\omega_n \frac{M^2}{16}.$$

Тогда из неравенства (5) следует

$$M^{n+2} \frac{1}{2^{3n+4}} \frac{\nu(P(d))\lambda(\Omega) n\omega_n}{P^n(d)} \leq I(g) - I(f).$$

Таким образом, или
$$M \le 2M' = 2 \sup_{\Omega \setminus \Omega_d} |f-g| \le 4\omega(d),$$
или
$$M \le 8P(d) \left(\frac{I(g)-I(f)}{\nu(P(d))\lambda(\Omega) n\omega_n} \right)^{\frac{1}{n+2}}.$$
Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ — решение уравнения (2) и последовательность функций $f_m \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $f_m|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$ минимизирует функционал I. Если $f, f_m \in \mathcal{A}_P(\Omega) \cap \mathcal{B}_\omega(\Omega)$, то последовательность f_m сходится равномерно к f на $\overline{\Omega}$.*

Действительно, чтобы установить равномерную сходимость, достаточно для произвольного $\varepsilon > 0$ выбрать такое $\tilde{d}$, что $4\omega(\tilde{d}) < \varepsilon$. Затем для фиксированного $\tilde{d}$ найти номер m_0, начиная с которого
$$8P(\tilde{d}) \left(\frac{I(f_m)-I(f)}{\nu(P(\tilde{d}))\lambda(\Omega) n\omega_n} \right)^{\frac{1}{n+2}} < \varepsilon.$$
Из теоремы 1 получаем нужное.

Замечание. Если функция $P(x)$ ограничена в области Ω, то вместо оценки (3) справедливо неравенство
$$\sup_{\Omega} |f-g| \le 8P_0 \left(\frac{I(g)-I(f)}{\nu(P_0)\lambda(\Omega) n\omega_n} \right)^{\frac{1}{n+2}},$$
где $P_0 = \sup\limits_{x\in\Omega} P(x)$.

Теорема 1 позволяет только утверждать, что последовательность приближенных решений, полученная методом минимизации функционала (1), равномерно сходится. Однако с помощью неравенства (3) невозможно оценить степень погрешности, так как неизвестно точное значение интеграла (1) для решения f. В следующей теореме правая часть неравенства оценивается через интеграл от оператора $Q[g]$.

Теорема 2. *Пусть $f, g \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и $f = g$ на границе $\partial\Omega$. Если f — решение уравнения (2) и $f, g \in \mathcal{A}_P(\Omega) \cap \mathcal{B}_\omega(\Omega)$, то справедливо неравенство*
$$\sup_{\Omega} |f-g| \le 4 \max \left\{ \omega(d),\ 4P^{4/3}(d) \left(\frac{\int\limits_{\Omega} |Q[g(x)]| dx}{\nu(P(d))\lambda(\Omega) n\omega_n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right\}. \qquad (6)$$

Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1 и неравенств
$$I(g) - I(f) = \int\limits_0^1 a'(t) dt \le a'(1) =$$
$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n {G'}_{\xi_i}(x, \nabla g)(g-f)_{x_i} dx =$$
$$= -\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} \left({G'}_{\xi_i}(x, \nabla g) \right) (g-f) dx \le \sup_{\Omega} |f-g| \int\limits_{\Omega} |Q[g(x)]| dx.$$

3. Оценка скорости сходимости для решения смешанной задачи

Рассмотрим теперь решение уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \left(G'_{\xi_i}(x, \nabla f) \right) = 0,$$

удовлетворяющее смешанному краевому условию

$$f|_{\partial\Omega \setminus \Gamma} = \varphi, \quad \sum_{i=1}^{n} G'_{\xi_i}(x, \nabla f) \nu_i |_{\Gamma} = \psi,$$

где Γ — кусочно гладкий кусок границы $\partial\Omega$, φ, ψ — заданные непрерывные функции на $\partial\Omega \setminus \Gamma$ и Γ соответственно, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ — вектор внешней единичной нормали к $\partial\Omega$. Определим функционал

$$I_1(g) = \int\limits_{\Omega} G(x, \nabla g) dx + \int\limits_{\Gamma} \psi g \, ds.$$

Определим множество $\Omega_d^{\Gamma} = \{x : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega \setminus \Gamma) > d\}$ для $d > 0$ и функцию $P_1(d) = \sup\limits_{x \in \Omega_d^{\Gamma}} \max\{P(x), 1\}$.

Через $d_D(x, y)$ мы обозначаем внутреннюю метрику в подобласти $D \subset \Omega$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ и $p \geq 1$ определим функцию

$$U_p^D(x, \varepsilon) = \int\limits_{\{d_D(x,y) \leq \varepsilon\}} (\varepsilon - d_D(x, y))^p \, dy.$$

Положим $U_p^D(\varepsilon) = \inf\limits_{D} U_p^D(x, \varepsilon)$. Будем предполагать, что $U_p^D(\varepsilon) > 0$. Отметим, что функция $U_p^D(\varepsilon)$ неубывающая по ε и $U_p^D(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть $\varepsilon = V_p^D(\delta)$ — обратная к U_p^D функция. Для области $D = \Omega_d^{\Gamma}$ соответствующие обозначения $U_p^d(\varepsilon) = U_p^{\Omega_d^{\Gamma}}(\varepsilon)$, $V_p^d(\delta) = V_p^{\Omega_d^{\Gamma}}(\delta)$.

Лемма 1. *Пусть $h \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ и $|\nabla h| \leq K$ в D. Тогда справедливо неравенство*

$$\sup_{x \in D} |h(x)|^p \leq K V_p^D \left(\frac{1}{K} \int\limits_{D} |h(x)|^p \, dx \right).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что функция $h(x) \geq 0$. Пусть точка $x_0 \in \overline{D}$ такая, что $h(x_0) = \max\limits_{\overline{D}} h(x)$. Тогда для произвольного $x \in D$

$$h(x_0) - h(x) \leq K d_D(x_0, x).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{D} h^p(x) dx \geq \int\limits_{\{d_D(x_0,x) \leq h(x_0)/K\}} (h(x_0) - K d_D(x_0, x))^p dx \geq$$

$$\geq KU_p^D\left(\frac{h(x_0)}{K}\right).$$

В силу монотонности функции V_p^D получаем нужное неравенство.

Отметим, что неравенство в лемме 1 является точным и достигается на функциях вида

$$h(x)=\begin{cases} a-d_D(x_0,x), & d_D(x_0,x)\leq a\\ 0, & d_D(x_0,x)>a.\end{cases}$$

Далее нам понадобится неравенство Пуанкаре в следующем виде

$$\int\limits_{\Omega}(u-u_\Omega)^2dx\leq\frac{1}{\lambda_1(\Omega)}\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2dx,$$

где $u\in W^{1,2}(\Omega)$ и $u_\Omega=\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}u(x)dx$ и $\lambda_1(\Omega)$ — некоторая положительная постоянная, независящая от функции u (см., например, [1, § 7.8]).

Теорема 3. *Пусть $\Gamma\neq\partial\Omega$, функция $f\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega\cup\Gamma)$ и удовлетворяет уравнению (2) в Ω. Тогда, если $f,g\in\mathcal{A}_P(\Omega)\cap\mathcal{B}_\omega(\Omega)$, $g\in C(\overline{\Omega}\cap C^1(\Omega\cup\Gamma))$ и*

$$f|_{\partial\Omega\setminus\Gamma}=g|_{\partial\Omega\setminus\Gamma},\quad G'_{\xi_i}(x,\nabla f)\nu_i|_\Gamma=G'_{\xi_i}(x,\nabla g)\nu_i|_\Gamma,$$

то для всех $d\in(0;d_0]$ выполняется неравенство

$$\sup_\Omega|f-g|\leq 2\omega(d)+$$

$$+2\left[P(d)V_2^d\left(\frac{(I_1(g)-I_1(f))}{\lambda_1(\Omega)\nu(P(d))P(d)}\right)\right]^{1/2}.$$

Доказательство. Положим $f^t=f+t(g-f)$ и $a(t)=I_1(f^t)$. Тогда, в силу того, что $a'(0)=0$, имеем

$$I_1(g)-I_1(f)=\int\limits_0^1ds\int\limits_0^s a''(t)dt=$$

$$=\int\limits_0^1ds\int\limits_0^s dt\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n G''_{\xi_i\xi_j}(x,\nabla f^t)(g-f)'_{x_i}(g-f)'_{x_j}dx\geq$$

$$\geq\int\limits_0^1ds\int\limits_0^s dt\int\limits_\Omega|\nabla f-\nabla g|^2\nu(|\nabla f^t|)dx. \tag{7}$$

Зафиксируем $d\in(0;d_0]$. Положим $h=g-f$, $M=\sup\limits_\Omega|h|$. Тогда

$$\int\limits_\Omega|\nabla f-\nabla g|^2\nu(|\nabla f^t|)dx\geq\nu(P(d))\int\limits_{\Omega_d^\Gamma}|\nabla f-\nabla g|^2dx\geq$$

$$\geq \lambda_1(\Omega)\nu(P(d)) \int\limits_{\Omega_d^\Gamma} (f - f_d - g + g_d)^2\, dx,$$

где f_d, g_d — средние значения функций f, g в Ω_d. Применяя лемму 3, из неравенства (7) получаем

$$(f - g - (f_d - g_d))^2 \leq P(d) V_2^d \left(\frac{(I_1(g) - I_1(f))}{\lambda_1(\Omega)\nu(P(d))P(d)} \right)$$

всюду в Ω_d^Γ. Тогда, так как $\Gamma \neq \partial\Omega$ и при $x \in \Omega \setminus \Omega_d$, выполнено $|f - g| \leq 2\omega(d)$,

$$|f_d - g_d| \leq 2\omega(d) + \left[P(d) V_2^d \left(\frac{(I_1(g) - I_1(f))}{\lambda_1(\Omega)\nu(P(d))P(d)} \right) \right]^{1/2}.$$

Поэтому для всех $x \in \Omega_d^\Gamma$

$$|f(x) - g(x)| \leq 2\omega(d) +$$

$$+ 2 \left[P(d) V_2^d \left(\frac{(I_1(g) - I_1(f))}{\lambda_1(\Omega)\nu(P(d))P(d)} \right) \right]^{1/2}.$$

И окончательно

$$\sup_\Omega |f - g| \leq 2\omega(d) +$$

$$+ 2 \left[P(d) V_2^d \left(\frac{(I_1(g) - I_1(f))}{\lambda_1(\Omega)\nu(P(d))P(d)} \right) \right]^{1/2}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 3 функция $P(x)$ ограничена, то выполнено неравенство*

$$\sup_\Omega |f - g|^2 \leq 4 P_0 V_2^\Omega \left(\frac{(I_1(g) - I_1(f))}{\lambda_1(\Omega)\nu(P_0)P_0} \right),$$

где $P_0 = \sup\limits_{x \in \Omega} P(x)$ и $V_2(\delta) = V_2^\Omega(\delta)$.

В случае когда исследуется решение, удовлетворяющее условию Неймана ($\Gamma = \partial\Omega$), естественно предполагать, что функция $P(x) \equiv P_0 = \mathrm{const}$. Тогда, применяя те же рассуждения, получим неравенство

$$\sup_\Omega (f - g - (f_\Omega - g_\Omega))^2 \leq P_0 V_2^\Omega \left(\frac{(I_1(g) - I_1(f))}{\lambda_1(\Omega)\nu(P_0)P_0} \right),$$

где f_Ω, g_Ω — средние значения по области Ω функций f и g соответственно.

Замечание. Из теоремы 3 следует, что вопрос о скорости сходимости приближенных решений к точному сводится, помимо всего прочего, к оценке бесконечно малой величины $V_p^d(\delta)$ при $\delta \to 0$, которая полностью определяется геометрией области Ω.

ПРИМЕЧАНИЕ

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-97021-р_поволжье_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д. Гилбарг, М. Трудингер. — М. : Наука, 1989. — 464 с.
2. Клячин, А. А. Некоторые свойства решений уравнения минимальных поверхностей в финслеровой метрике / А. А. Клячин // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. — М. : Изд-во МГУ, 2005. Вып. XXVI. — С. 201–208.
3. Клячин, А. А. О скорости сходимости последовательности, минимизирующей функционал площади / А. А. Клячин // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». — Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2007. — Вып. 2. — С. 136–142.
4. Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1970. — 512 с.
5. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1988. — 336 с.

THE RATE OF CONVERGENCE OF THE SEQUENCE, WHICH DELIVERS MINIMUM IN THE VARIATIONAL PROBLEM

A.A. Klyachin

In this paper we investigate the question of uniform convergence of functions, minimizing a convex functional. We obtained the estimates of the rate of this convergence for different boundary conditions.

Key words: *variational problem, minimization of a convex functional, the rate of convergence, the minimal surface equation, mixed boundary value problem.*